（別紙）

タイトル	2023 年度 特別選抜(学校推薦型選抜・帰国生選抜) 共同教育学部(自然科学系 数学専攻) 小論文・面接
評価の ポイント	(小論文の評価のポイント) • 与えられた条件から結論を導く過程を筋道立てて考えることができる。 • 高校数学(数Ⅲの内容を含む)の正確な推論ができる。 • 解決の過程を分かりやすい形で説明できる。 (面接の評価のポイント) • 数学科の教員としての資質がある。 • 数学に関する基本事項を理解しており，適切な場面で活用することができる。 • 数学に関する質問に対し，返答内容が的確である。

2023 年度 学校推薦型選抜・帰国生選抜 小論文 (数学)

受験番号		氏名	

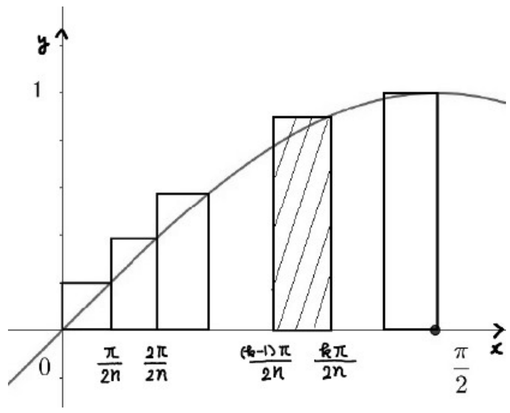
$\boxed{1}$　n を自然数とする。次の問に答えよ。

(1) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ は何を表しているか，$y=\sin x$ のグラフを利用して図示し説明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ の値を求めよ。

[解答欄]

(1)



$\frac{\pi}{2n}$ は x 軸の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までを n 等分した点 $\frac{(k-1)\pi}{2n}$ から点 $\frac{k\pi}{2n}$ $(k=1,2,3,\ldots,n)$ までの長さである。
$\frac{\pi}{2n}$ に $x=\frac{k\pi}{2n}$ における $\sin x$ の値 $\sin\frac{k\pi}{2n}$ をかけると斜線の長方形の面積 $\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ になる。
よって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

は n 個の長方形の面積 $\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}(k=1,2,3,\ldots,n)$ を $k=1$ から n まで加えた面積の和である。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ は $y=0$, $y=\sin x$ と $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積になるので,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\ &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\cos 0\\ &= 1\end{aligned}$$

得点	

受験番号		氏名	

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ を次で定める:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \log(x^2+1) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) 方程式 $f(x) = 1$ が正の実数解を持たないことを示せ。

(2) 以下の文章 (A) では，誤った議論により (1) に反する結論を導いている。中間値の定理の内容を説明した上で，(A) の議論がどのように誤っているか論述せよ。

(A)「$f(0) = 0 < 1$ および $f(1) = 1 + \log 2 > 1$ が成り立つ。従って，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 1$ は $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つ。」

(3) 中間値の定理を用いて，方程式 $f(x) = 1$ が実数解を持つことを説明せよ。

[解答欄]

(1) $f(x)$ は $x \neq 0$ で微分可能であり，導関数は

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2(x^2+1)} \quad (x \neq 0)$$

である．$x \neq 0$ であるとき，$x^2+1 > x^2 > 0$ が成り立つ．また，全ての実数 x に対して以下が成り立つ。

$$2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0$$

従って，区間 $(0, \infty)$ における $f(x)$ の増減は右の通りである．特に，$x > 0$ のとき $f(x) \leq 1 + \log 2 > 1$ が成り立つので，方程式 $f(x) = 1$ は正の実数解を持たない．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		減少	極小 $1 + \log 2$	増加

(2) 中間値の定理の主張は以下の通りである:

「a, b を $a < b$ を満たす実数とする．関数 $g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり，$f(a) \neq f(b)$ であるとする．$f(a)$, $f(b)$ のうち小さい方を m, 大きい方を M とおき，k を $m < k < M$ を満たす実数とする．このとき，$a < c < b$ かつ $f(c) = k$ を満たす実数 c が存在する.」

$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = +\infty$ より，閉区間 $[0, 1]$ において $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である．従って，(A) のように，$f(x)$ に対して閉区間 $[0, 1]$ で中間値の定理を適用することは出来ない．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ が成り立つので，$a_0 < 0$ かつ $f(a_0) > 1$ を満たす実数 a_0 が存在する．また，$\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x) = -\infty$ が成り立つので，$a_0 < b_0 < 0$ かつ $f(b_0) < 1$ を満たす実数 b_0 が存在する．$f(x)$ は $x < 0$ で（特に閉区間 $[a_0, b_0]$ で）連続であるので，中間値の定理より，$a_0 < c_0 < b_0$ かつ $f(c_0) = 1$ を満たす実数 c_0 が存在する．従って，方程式 $f(x) = 1$ は実数解 c_0 を持つ．

(3) 別解（a_0, b_0 を具体的に与える）.

$2 < e$ より $f(-1) = -1 + \log 2 < -1 + \log e = 0 < 1$ が成り立つ．また，$10 > 3^2 > e^2$ より $f(-3) = -\dfrac{1}{3} + \log 10 > -\dfrac{1}{3} + 2 > 1$ である．$f(x)$ は閉区間 $[-3, -1]$ で連続であるので，中間値の定理より，$a_0 < c_0 < b_0$ かつ $f(c_0) = 1$ を満たす実数 c_0 が存在する．従って，方程式 $f(x) = 1$ は実数解 c_0 を持つ．

得点	

受験番号		氏名	

3　x を 0 以上の実数として，2 つの複素数 z, w を $z = x + 2i$, $w = x + 1 + i$ とする (i は虚数単位)。x を変化させるとき常に $|w| - |z| < 1$ であることを示せ。

[解答欄]

$f(x) = |w| - |z|$ とすると，

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2+1} - \sqrt{x^2+4}.$$

$f(x)$ の増減を調べる。

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+4} - x\sqrt{(x+1)^2+1}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

であり，

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ (x+1)\sqrt{x^2+4} - x\sqrt{(x+1)^2+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (x+1)\sqrt{x^2+4} \ = \ x\sqrt{(x+1)^2+1} \\
&\Leftrightarrow\ (x+1)^2(x^2+4) \ = \ x^2((x+1)^2+1) \qquad [x \geqq 0 \text{ より}] \\
&\Leftrightarrow\ x^2(x+1)^2 + 4(x+1)^2 \ = \ x^2(x+1)^2 + x^2 \\
&\Leftrightarrow\ 3x^2 + 8x + 4 \ = \ 0 \\
&\Leftrightarrow\ (3x+2)(x+2) \ = \ 0.
\end{aligned}$$

この方程式は $x \geqq 0$ の範囲に解を持たない。このことと $f'(0) = \frac{2}{2\sqrt{2}} > 0$ であることより，$f(x)$ は $x \geqq 0$ において単調増加であるとわかる。

さらに，$f(0) = \sqrt{2} - 2\ (< 1)$ であり，$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ は以下の通り。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2 + 1 - x^2 - 4}{\sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{x^2+4}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{x^2+4}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\sqrt{(1+\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} \ = \ 1.
\end{aligned}$$

以上より，$f(x) < 1$ である。

得点	